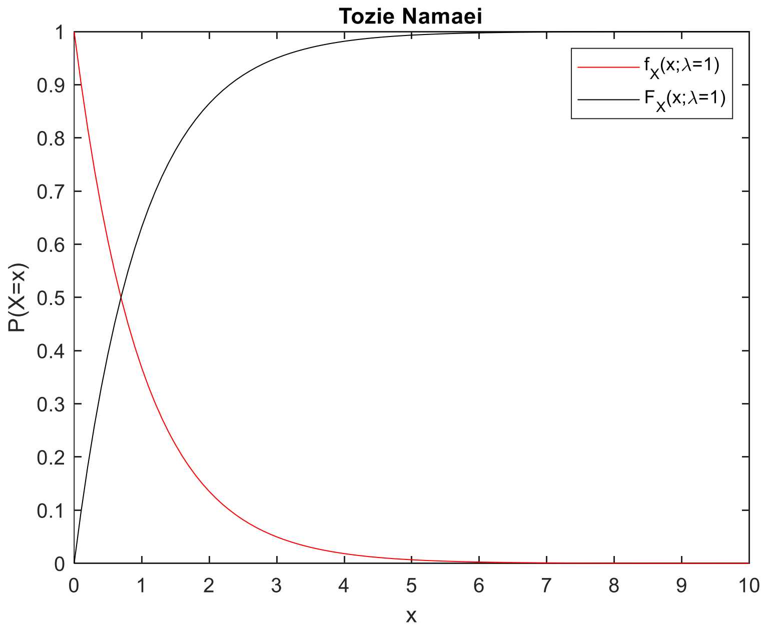
فرآیندهای تصادفی
فرایندهای پواسن

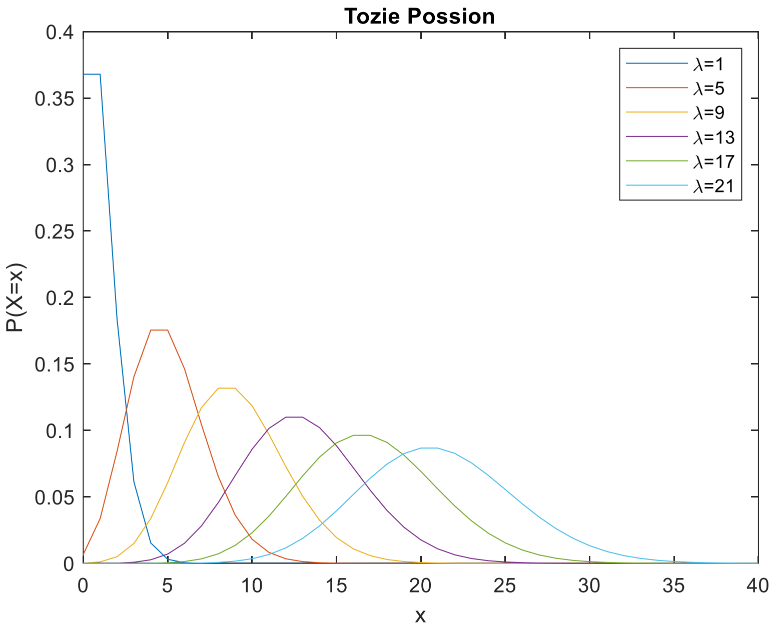
محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

توزیع پواسن در مقابل توزیع نمائی

نوع فرایند	فرایند	چگالی یا جرم	تابع تجمیع	میانگین	وردائی	چولگی
گسسته	دوجمله‌ای	$f(x;n,\theta)=\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$	$F(x;n,\theta)=\sum_{i=0}^{x}\binom{n}{i}\theta^{i}(1-\theta)^{n-i}$	$n\theta$	$n\theta(1-\theta)$	$\frac{1-2\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$
	پواسن	$f(x,\lambda)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}$	$F(x,\lambda)=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x}\frac{\lambda^{i}}{i!}$	λ	λ	$\lambda^{-\frac{1}{2}}$
پیوسته	نمائی	$f(x,\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}$	$F(x,\lambda)=1-e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^{2}}$	2

نمودار توزیع پواسن و توزیع نمائی





عدد اویلر

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=?$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n}=?$$

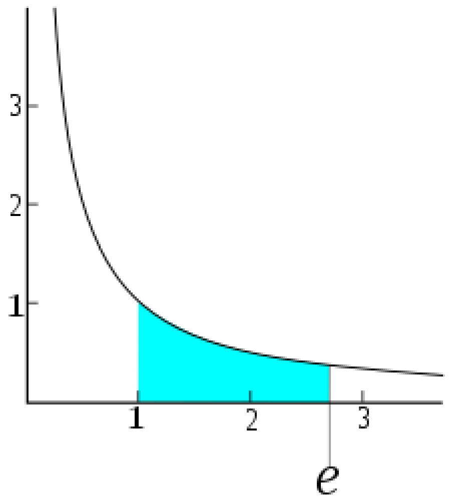
$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n}=?$$

عدد اویلر

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = ?$$

ناحیهٔ زیر منحنی $y = \frac{۱}{x}$ بین ۱ و e برابر یک

$$\int_{۱}^{e} \frac{۱}{x} dx = ۱$$



فرایند پواسن

از پراستفاده‌ها

شمارش رخداد پیشامدهای خاص

- که با آهنگ یا سرعت خاصی اتفاق می‌افتند
- اما کاملا تصادفی

پس جهت پیش‌بینی تعداد رخدادهائی که در آینده رخ خواهند داد

- یا پیش‌بینی احتمال رخداد تعداد مشخصی از پیشامدها در بازه‌ای ثابت
- مثال
  - تعداد بازدیدکنندگان تارمانهٔ شما در روز
  - تعداد کلیک تبلیغاتی در ماه بعدی
  - تعداد تماس‌های تلفنی دریافتی در زمان حضور درکار
  - تعداد مرگ و میر ناشی از بیماری کشنده در سال آینده
  - زلزله
  - تعداد تصافات خودرو در مانه یا منطقه‌ای خاص
  - محل کاربران در شبکه بی‌سیم
  - درخواست دسترسی به مستندات متمایز روی سرور وب
  - آغاز جنگ‌ها
  - فوتون‌هایی که بر فتودیود فرود می‌آیند

توزیع دوجمله‌ای

امتحان‌های تکراری

احتمال تمام پیروزی‌ها برابر با θ

هر پرتاب (آزمایش) مستقل از دیگر آزمایش‌ها

$X \sim \text{دوجمله‌ای}(x; n, \theta)$

$0 \leq \theta \leq ۱$

$$b(x; n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (۱ - \theta)^{n-x}, \qquad x = 0, ۱, \dots, n$$

ویژگی‌ها

احتمال تجمعی

$$B(x;n,\theta)=\sum_{k=0}^{x} b(x;n,\theta)$$

$$b(x;n,\theta)=b(n-x;n,1-\theta)$$

$$\mu=n\theta$$

$$\sigma^{۲}=n\theta(1-\theta)$$

مثال

۱۷ نفر میانگین افرادی هستند که در هر هفته به جادی کمک مالی می‌کنند.

مهم چون افراد مذکور به وی کمک مالی می‌کنند.

سوال- احتمال اینکه هفته بعد دقیقا بیست نفر پست‌های وی را تایید کنند.

حل

- آغاز با تعداد بازدیدها
- هر شخص که پست‌ها را مطالعه می‌کند دارای احتمال اینکه مطلب را دوست داشته باشد و کمک مالی کند
  - روش معمول توزیع دوجمله‌ای
  - به دلیل محاسبهٔ احتمال تعداد رخدادهای موفق (پرداخت‌ها)
  - متغیر تصادفی دوجمله‌ای
    - تعداد x موفقیت از n آزمایش متوالی
    - با فرض احتمال موفقیت θ در هر آزمایش

مثال-

اما صرفا دارای اطلاع از میانگین پرداخت‌ها در هفته ۱۷ نفر در هفته

- آهنگ rate
- یا امید ریاضی x
  - به دیگر سخن بی‌اطلاعی از احتمال پرداخت p و همچنین بی اطلاعی از تعداد ملاقات‌کنندهٔ روزانه n
- تلاش برای یافتن آن‌ها از دادهٔ قبلی
  - فرضا وجود آمار یک ساله و تعداد کلا مراجعان ۵۹هزار نفر
  - ۸۸۸ نفر پرداخت داشتند.
    - پس تعداد مراجعه در هفته $\mathrm{n} = \frac{۵۹۰۰۰}{۵۲} = ۱۱۳۴$
    - و تعداد پرداخت در هفته $\mathrm{x} = \frac{۸۸۸}{۵۲} = ۱۷$
    - احتمال موفقیت $\theta = \frac{۸۸۸}{۵۹۰۰۰} = ۰.۰۱۵$ یا ۱,۵ درصد

$$b(x; n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (۱ - \theta)^{n-x}$$

$$= \binom{۱۱۳۴}{۲۰} ۰.۰۱۵^{۲۰} (۱ - ۰.۰۱۵)^{۱۱۳۴-۲۰} = ۰.۰۶۹۶۲$$

مثال-

- احتمال دوجمله‌ای برای xهای متفاوت

x	$b(X = x)$
۱۰	۰.۰۲۲۵۰
۱۷	۰.۰۹۷۰۱
۲۰	۰.۰۶۹۶۲
۳۰	۰.۰۰۱۲۱
۴۰	$<$ ۰.۰۰۰۰۰۱

مثال- ادامه

- تعداد پرداخت در هفته ۱۷
- تعداد پرداخت در روز $\text{۲.۴} = \frac{۱۷}{۷}$
- تعداد پرداخت در ساعت $\text{۰.۱} = \frac{۱۷}{۷\times۲۴}$

استفاده از توزیع دوجمله‌ای برای احتمال ساعتی ۰,۱ پرداخت بر ساعت

- به معنای پرداخت صفر در بیشتر ساعت‌ها
- ولی بعضی ساعت‌ها دقیقا یک پرداخت
  - اما در عمل امکان پرداخت بیش از یک در بعضی از ساعات
    - $\Leftarrow$ ایرادهای توزیع دوجمله‌ای
      - عدم امکان رخداد بیشتر از یک پیشامد در واحد زمان
      - یا یک یا هیچ پیشامد در هر واحد زمان

مثال- ادامه

- حل؟ تقسیم یک ساعت به شصت دقیقه و کوچکتر کردن واحدهای زمانی.
  - یک ساعت امکان داشتن بیشتر از یک پیشامد
  - اما دقیقه هنوز دارای دقیقا یک یا هیچ پیشامد
  - به نظر حل مسئله
  - ولی اگر به دنبال چند پرداخت در دقیقه، جوابگو نیست
    - تقسیم به ثانیه
      - روز از نو روزی از نو
  - مسئلهٔ دودوئی بودن متغیر تصادفی دوجمله‌ای

مثال- ادامه

پس با تقسیم‌بندی کوچکتر، داشتن چند پیشامد در واحد اصلی زمان

- $n \to \infty$
- با فرض ثابت بودن سرعت و میزان
  - $\theta \to 0$
  - وگرنه $n\theta$ مقدار بی‌نهایت خواهد گرفت
- استفاده از حد
  - واحدهای زمانی بی‌نهایت کوچک
  - عدم نیاز توجه به رخداد تک پیشامد در واحد زمانی
    - نحوهٔ عملکرد توزیع پواسنی

مثال – ادامه

عدم امکان استفاده از دوجمله‌ای برای محاسبهٔ احتمال موفقیت با بکارگیری سرعت و میزان

- بلکه نیاز به اطلاعات بیشتر **n** و θ

توزیع پواسن

- عدم نیاز به دانستن **n** یا θ
- با فرض بی‌نهایت بزرگی **n** و θ بی‌نهایت کوچک
- پس تنها ضریب و عامل موردنیاز λ امید ریاضی **x**
- در زندگی واقع دانستن تعداد سه تماس تلفنی در ساعت ۲ تا ۴ معمول‌تر از دانستن **n** و θ

تحویل دوجمله‌ای به پواسن

$$
\begin{aligned}
P(X=x) &= \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, b(x;n,\theta) \\
&= \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \binom{n}{x} \theta^x (۱-\theta)^{n-x} \\
&= \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\
&= \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \frac{n!}{(n-x)!\,x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \\
&= \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \frac{n!}{(n-x)!} \frac{۱}{n^x} \frac{\lambda^x}{x!} \left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}
\end{aligned}
$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \frac{n!}{(n-x)!} \frac{۱}{n^x} = ۱$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda}$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = ۱$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \frac{n!}{(n-x)!} \frac{۱}{n^x} = ۱ \\
&\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda} \\
&\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = ۱
\end{aligned}
\right\} \Longrightarrow P(X=x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}
$$

قضیهٔ تحویل توزیع دوجمله‌ای به توزیع پواسن

$X \sim \text{دوجمله‌ای}(x; n, \theta)$

$\lambda > 0$ مقداری ثابت و $\lim_{n\to\infty} n\theta = \lambda$

آن‌گاه

- با $n \to \infty$ احتمال جرم X به احتمال جرم پواسن همگرا می‌شود پس برای $x \in \{0,۱,۲, \dots\}$

$$\lim_{n\to\infty} X = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

توزیع پواسن

پیشامدی $0,۱,۲, \ldots$ بار در بازه‌ای رخ می‌دهد. λ تعداد میانگین پیشامدها در بازه آهنگ یا میزان پیشامد است.

احتمال مشاهدهٔ **x** پیشامد در بازه برابر است با

$$p(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, x = 0, ۱, ۲, \ldots$$

به طوری که

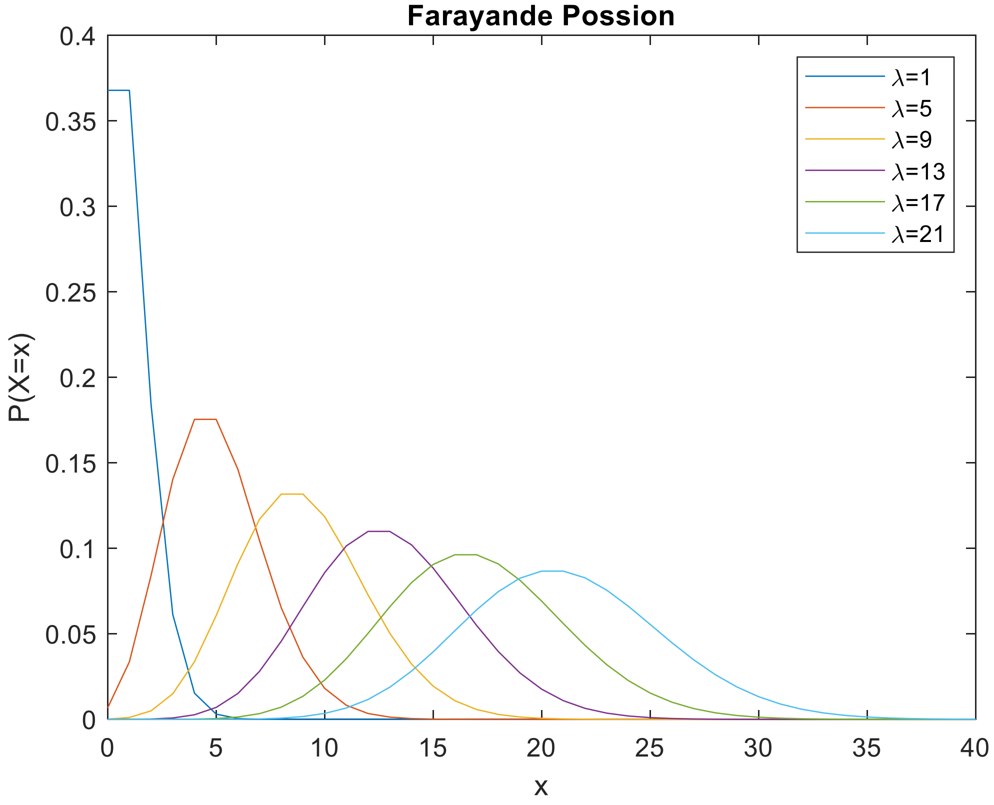
- λ
- e عدد اویلر (نپر) و پایه لگاریتم طبیعی و برابر ... ۲.۷۱۸۲۸
- x مقادیر $0,۱,۲, \ldots$
- $x! = x \times (x - ۱) \times (x - ۲) \times \cdots \times ۲ \times ۱$

مثال-

- احتمال دوجمله‌ای برای xهای متفاوت

x	$b(X = x)$	$Possion(X = x; \lambda = ۱۷)$
۱۰	۰.۰۲۲۵۰	۰.۰۲۳۰۰
۱۷	۰.۰۹۷۰۱	۰.۰۹۶۲۸
۲۰	۰.۰۶۹۶۲	۰.۰۷۵۹۵
۳۰	۰.۰۰۱۲۱	۰.۰۰۳۴۰
۴۰	$<$ ۰.۰۰۰۰۰۰۱	$<$ ۰.۰۰۰۰۰۰۱

چند ویژگی



توزیع پواسن مورد استفاده برای مدل‌سازی پیشامدهای نادر

- اما λ می‌تواند هر عددی را اختیار کند
  - عدم نیاز به کوچک بودن مقدار

توزیعی نامتقارن

- همیشه چولگی به سمت راست
  - محدود به رخداد صفر از سمت راست
  - پرداخت منفی یکبار وجود ندارد
  - بدون محدودیت در سوی دیگر

λ بزرگتر، نمودار شبیه‌تر به توزیع نرمال

چند ویژگی- ادامه

ثابت بودن سرعت میانگین در واحد زمان

- فرضا بازدید ساعتی در طول روز بیشتر در طول شب کمتر
  - بهتر است تغییر به سرعت ماهانه تخمین بهتر
    - تاثیر فصلی نامهم

استقلال رخدادها

- لزوما بازدید امری مستقل نیست
  - مراجعه به خاطر تبلیغ تاثیرگذاران
  - یا در مجله‌ای اینترنتی در صفحه اول قرار گرفته است
  - تعداد زلزله سالانه کشور ممکن است توزیع پواسن نباشد چرا که زلزله بزرگی موجب پس لرزه‌های بیشتر

رابطهٔ بین توزیع نمائی و پواسن

- در صورتی که تبعیت تعداد پیشامدی در واحد زمان از توزیع پواسن
  - تبعیت زمان بین پیشامدها از توزیع نمائی
  - با وجود گسسته‌بودن توزیع پواسن و پیوسته بودن تویع نمائی
    - ارتباط سخت تنگاتنگ این دو توزیع

توزیع نمائی

دلیل استفاده از توزیع مذکور

- پیش‌بینی مقدار زمان انتظار تا پیشامد بعدی
  - مثلا پیروزی، شکست، دریافت
- مقداری از زمان تا مشتری جستجو را تمام کند و خرید واقعی محصولی را در فروشگاه به انجام رساند
  - پیروزی
- مقداری از زمان تا خراب شدن سخت‌افزار روی رایانه
  - شکست
- مقدار زمان انتظار تا رسیدن اتوبوس
  - ورود

توزیع نمائی

$$X \sim e^{\lambda}$$

- λ بازه زمانی نیست
  - بلکه آهنگ و سرعت یا میزان رخداد پیشامد است
    - شبیه پارامتر توزیع پواسنی
  - آهنگ بازدیدکنندگان بلاگ و صفحه درس ۵ نفر در هفته!
  - تعداد مشتریان که در ساعت به فروشگاه مراجعه می‌کنند
  - تعداد زلزله‌ها در سال
  - تعداد خودرو تصادفی در هفته
  - تعداد موهای یافت شده در کتلت مهدی
  - تعداد غلت‌ها در اصلایدها
- همگی آهنگ در واحد زمان
  - پس دقیقا همانند توزیع پواسن

توزیع نمائی

اما جهت مدل‌کردن زمان اتلافی بین وقایع

- بدنبال صحبت از زمان تا سرعت
- تعداد سال‌های کار کامپیوتر بدون خرابی ۱۰ سال
  - به جای گفتن ۰,۱ خرابی در سال
- مراجعهٔ هر مشتری در هر ۱۰ دقیقه
- زلزله‌های شدید هر پنج سال یکبار

اصطلاح میانگین توزیع نمائی $\frac{1}{\lambda}$

- معنائی است که در مثال‌های اخیر مستفاد شد
- پارامتر زوال (سرعت زوال)
  - بیان بر پایهٔ زمان
    - هر ده دقیقه، هر هفت سال
    - معکوس آهنگ پواسن
      - سه مشتری در ساعت، به معنای یک مشتری در هر $\frac{1}{3}$ ساعت

توزیع نمائی

$X \sim e^{۰.۲۵}$

- آهنگ پواسن برابر ۰.۲۵ در واحد زمان
  - دقیقه، ساعت، سال
  - وقوع پیشامد با میانگین ۰.۲۵ زمان تا رخ دادن آن
    - تبدیل به زمان
      - چهار ساعت تا زمان رخداد

توزیع نمائی- تابع چگالی

تعریف توزیع نمائی

- توزیع احتمالی زمانی بین پیشامدها (وقایع) در فرایند پواسنی
- زمان لازم تا پیشامد رخ دهد
  - در بازهٔ انتظار هیچ پیشامدی اتفاق نیفتاده است
- به دیگر سخن

$$p(x;\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$x=0\Longrightarrow p(0;\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{0}}{0!}=e^{-\lambda}$$

توزیع نمائی- تابع چگالی

- باید در نظر داشت که تابع پواسن بازه زمانی که پیشامد پواسنی X=x در یک واحد زمانی رخ می‌دهد
- در صورتی که به دنبال توزیع احتمال رخ ندادنی پیشامدی در بازه زمانی **t** و نه یک
  - $p(\sim t)$
  - برابر است با ضرب اتفاق نیفتادن در بازه زمانی نخست در اتفاق نیفتادن در بازه زمانی دوم تا اتفاق نیفتادن در بازه زمانی **t**-اُم
    $p(\sim t) = e^{-\lambda} \times e^{-\lambda} \times \cdots \times e^{-\lambda} = e^{-\lambda t}$
- فرض توزیع پواسنی$\Longleftarrow$ وقوع پیشامدها مستقل از یکدیگر
- بنابراین محاسبهٔ احتمال صفر پیروزی در **t** زمان با ضرب تک تک آن‌ها

$$p(T > t) = p\left(X = 0_{\text{در}t\text{زمان}}\right) = e^{-\lambda t}$$

- T که بدنبال بررسی آن هستیم
  - متغیرتصادفی زمان انتظار تا اولین پیشامد
- X تعداد پیشامدهای در آینده که از فاصلهٔ پواسنی تبعیت می‌کند
  - $p(T > t)$
    - احتمال زمان انتظار تا اولین پیشامد بزرگتر از **t** واحد زمانی
  - $p\left(X = 0_{\text{در}t\text{زمان}}\right)$
    - احتمال صفر پیروزی در **t** واحد زمانی

توزیع نمائی- تابع چگالی

- تابع چگالی
  - مشتق تابع تجمیعی
- تابع تجمیعی و موجب داشتن مقدار $P(T > t)$
  - $۱ - P(T > t)$
  - مشتق‌گیری از

$$P(T \leq t) = ۱ - P(T > t) = ۱ - e^{-\lambda t}$$

  - منجر به

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

توزیع نمائی–

در نتیجه تابع چگالی توزیع نمائی

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

نتیجه تابع تجمیع توزیع نمائی

$$F(x) = \begin{cases} \text{۱} - \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

توزیع نمائی- میانگین و وردائی

میانگین

$$E[X] = \frac{۱}{\lambda}$$

وردائی

$$Var(x) = \frac{۱}{\lambda^{۲}}$$

خاصیت بی‌حافظگی

$$P\{X > s + t|X > t\} = P\{X > s\}, \forall s, t \geq 0$$

اثبات[؟]

بدردبخور

- خرید دستگاهی الکتریکی در ده سال پیش
  - احتمال انکه سه سال دیگر کار کند (یعنی در کل ۱۳ سال) دقیقا برابر با احتمال خرید دستگاهی جدید در سه سال دیگر کار کند $P\{X > ۱۳|X > ۱۰\} = P\{X > ۳\}$
- منطقی؟
- پس برای چه کاربرد دارد؟
  - تصادف خودرو
    - شانس تصادفی خودروی شما با تصادفی که دیروز داشتید کاهش یا افزایش نمی‌یابد.

موارد دیگر بی‌حافظگی

- توزیع نمائی
  - تنها توزیع پیوسته بی‌حافظه (یا آهنگ ثابت شکست)
- توزیع هندسی معادل گسسته
  - تنها توزیع گسستهٔ بی‌حافظه

مثال

میانگین زمان گذراندن در بانک ده دقیقه است. پس $\lambda = \frac{۱}{۱۰}$

سوال- احتمال گذراندن بیشتر از ۱۵ دقیقه

$$P(X > ۱۵) = e^{-۱۵\lambda} = e^{-\frac{۳}{۲}} \approx ۰.۲۳۳$$

سوال- احتمال گذراندن بیشتر از ۱۵ دقیقه با دانستن اینکه وی تاکنون بیشتر از ده دقیقه در بانک مانده است؟

$$P(X > ۵) = e^{-۵\lambda} = e^{-\frac{۱}{۲}} \approx ۰.۶۰۷$$

مثال

اداره پست با دو کارمند

- هر کدام مشغول خدمت‌دهی به مشتری‌های متفاوت. مشتری سومی وارد می‌شود. کار وی به محض پایان یافتن کار یکی از دو مشتری فعلی
- زمان خدمت‌دهی به مشتری دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{۱}{\lambda}$
- سوال- احتمال اینکه مشتری سوم از بین سه مشتری آخرینی باشد که اداره را ترک می‌کند؟
- ۱/۲

توزیع برنولی

آزمایش دارای دو برآمد پیروزی و شکست، و احتمال متناظر θ و θ – ۱

$X \sim$ برنولی(θ)

$0 \leq \theta \leq 1$

شیر=1

خط=0

$$f(x;\theta) = \theta^{x}(۱-\theta)^{۱-x}, x = 0, ۱$$

توزیع برنولی

$X \sim \text{برنولی}(\theta)$

$0 \leq \theta \leq 1$

شیر=1

خط=0

$$E[X] = \theta$$
$$Var[X] = \theta(۱ - \theta)$$

محاسبهٔ امید با شرطی بودن

$$E[X] = E\big[E[X|Y]\big]$$

گسسته

$$E[X] = \sum_{y} E\big[E[X|Y=y]\big]P\{Y=y\}$$

پیوسته

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} E\big[E[X|Y=y]\big]f_Y(y)$$

محاسبهٔ امید با شرطی بودن- اثبات حالت گسسته

$$\sum_y E\big[E[X|Y=y]\big]P\{Y=y\}$$
$$=\sum_y \sum_x xP\{X=x|Y=y\}\,P\{Y=y\}$$
$$=\sum_y \sum_x x\frac{P\{X=x,Y=y\}}{P\{Y=y\}}\;P\{Y=y\}$$
$$=\sum_y \sum_x xP\{X=x,Y=y\}$$
$$=\sum_x x\sum_y P\{X=x,Y=y\}$$
$$=\sum_x xP\{X=x\}$$
$$=E[X]$$

محاسبهٔ وردائی با شرطی بودن

$$Var[X] = E\big[Var[X|Y]\big] + Var[E[X|Y]]$$

محاسبهٔ وردائی با شرطی بودن-اثبات حالت گسسته

$$E\left[Var[X|Y]\right] = E\left[E\left[X^{۲}|Y\right] - (E[X|Y])^{۲}\right]$$
$$= E\left[E\left[X^{۲}|Y\right]\right] - E\left[(E[X|Y])^{۲}\right]$$
$$= E\left[X^{۲}\right] - E\left[(E[X|Y])^{۲}\right]$$

$$Var\left[E[X|Y]\right] = E\left[(E[X|Y])^{۲}\right] - \left(E\left[E[X|Y]\right]\right)^{۲}$$
$$= E\left[(E[X|Y])^{۲}\right] - E[X]^{۲}$$

$$E\left[Var[X|Y]\right] + Var\left[E[X|Y]\right] = E[X]^{۲} - (E[X])^{۲}$$

مثال

مقدار پول مربوط به آسیب با متغیر تصادفی نمائی با میانگین ۱۰۰۰

شرکت بیمه تنها پرداخت مقادیر بالاتر از ۴۰۰

امید ریاضی و انحراف معیار مقدار پرداختی بیمه به ازای هر تصادف

- X مقدار پول آسیب ناشی از تصادف
- مقدار پرداخت $(X-۴۰۰)^+$
  - علامت + نشانگر مقدار تابع بالا برابر صفر اگر نتیجه تفریق منفی وگرنه برابر مقدار مثبت

$$I=\begin{cases} ۱, & X \geq ۴۰۰ \\ 0, & X \leq ۴۰۰ \end{cases}$$

  - $Y=(X-۴۰۰)^+$ برابر مقدار پرداختی
  - بدون حافظگی
    - اگر مقدار آسیب از ۴۰۰ بیشتر باشد، آن‌گاه مقدار افزودگی دارای میانگین ۱۰۰۰ $\Longleftarrow$

$$E[Y|I=۱]=۱۰۰۰$$
$$E[Y|I=0]=0$$
$$Var[Y|I=۱]=۱۰۰۰^۲$$
$$Var[Y|I=0]=0$$

مثال

$$E[Y|I=۱] = ۱۰^{۳}I$$
$$Var[Y|I=۱] = ۱۰^{۶}I$$

- I متغیر تصادفی برنولی
- $P(I=1) = P(X > ۴۰۰) = e^{-۴۰۰\lambda} = e^{-۰.۴}$

$$E[Y] = E\big[E[Y|I=۱]\big] = ۱۰^{۳}e^{-۰.۴} \approx ۶۷۰.۳۲$$
$$Var[Y] = E\big[Var[Y|I]\big] + Var\big[E[Y|I]\big]$$
$$= ۱۰^{۶}e^{-۰.۴} + ۱۰^{۳}e^{-۰.۴}\left(۱ - e^{-۰.۴}\right)$$
$$\sqrt{Var[Y]} = ۹۴۴.۰۹$$

پیچیدگی

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$$

تابع $f(.)$ از مرتبهٔ $o(h)$

تابع $f(x)=x^{۲}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{۲}}{h}=\lim_{h\to 0}h=0$$

$$P(t<X<t+h)\approx f(t)h$$

$$P(t<X<t+h|X>t)\approx \lambda(t)h$$

$$P(t<X<t+h)=f(t)h+o(h)$$

$$P(t<X<t+h|X>t)=\lambda(t)h+o(h)$$

فرایند پواسن

فرایند تصادفی دربرگیرندۀ هر دو مفهوم استقلال و توزیع پواسنی

تعریف- فرایند پواسن با آهنگ یا سرعت $\lambda > 0$ فرایندی تصادفی و مقدار صحیح $\{X(t),t \geq 0\}$ که

- ۱- $X(0) = 0$
- ۲- برای هر زمان $t_n > \cdots > t_۲ > t_۱ > 0 = t_0$ افزایش‌های فرایند

$$X(t_۱) - X(t_0), X(t_۲) - X(t_۱), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-۱})$$

متغیرهای تصادفی مستقل هستند

- ۳- مقادیر $s \geq 0$ و $h > 0$، متغیر تصادفی $X(s + h) - X(s)$ دارای توزیع پواسنی زیر است

$$P(X(s + h) - X(s) = x) = \frac{(\lambda h)^x e^{-\lambda h}}{x!}$$

و میانگین $E[X(h)] = \lambda h$ و وردائی برابر $Var[X(h)] = \lambda h$

فرایند پواسن

فرایند تصادفی دربرگیرندهٔ هر دو مفهوم استقلال و توزیع پواسنی

تعریف- فرایند پواسن با آهنگ یا سرعت $\lambda > 0$ فرایندی تصادفی و مقدار صحیح $\{X(t), t \geq 0\}$ که

- ۱- $X(0) = 0$
- ۲- برای هر زمان $t_0 = 0 < t_۱ < t_۲ < \cdots < t_n$ افزایش‌های فرایند
  $X(t_۱) - X(t_0), X(t_۲) - X(t_۱), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-۱})$
  متغیرهای تصادفی مستقل هستند
- ۳- مقادیر $s \geq 0$ و $h > 0$، متغیر تصادفی $X(s+h) - X(s)$ دارای توزیع پواسنی زیر است
  $$P(X(s+h) - X(s) = ۱) = \lambda h + o(h)$$
  $$P(X(s+h) - X(s) \geq ۲) = o(h)$$

فرایند پواسن

$T_۱$ نشان‌دهنده زمان اولین پیشامد فرایندی پواسنی

- $\{X(t), t \geq 0\}$

$$T_۱ = \min\{t \geq 0 : X(t) = 1\}$$

$$P_0(t) = P\{X(t) = 0\}$$

$$P_0(t+h) = P\{X(t+h) = 0\}$$
$$= P\{X(t) = 0, X(t+h) - X(t) = 0\}$$
$$= P\{X(t) = 0\}P\{X(t+h) - X(t) = 0\}$$
$$= P_0(t)\{1 - \lambda h + o(h)\}$$

$$\Longrightarrow P_0(t+h) - P_0(t) = -\lambda h P_0(t) + o(h)$$

تقسیم بر h و سپس $h \to 0$

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t)$$

$$\frac{P'_0(t)}{P_0(t)} = -\lambda$$

انتگرال

$$\log\big(P_0(t)\big) = -\lambda t + C$$

یا

$$P_0(t) = Ke^{-\lambda t}$$

یا $P_0(0) = ۱$ پس $K = ۱$

$$P(T_۱ > t) = P\{X(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

فرایند پواسن

T_1 زمان اولین پیشامد فرایند پواسنی

T_1 و T_2 و ... (دنباله زمان‌های بین-پیشامدها) متغیرهای تصادفی نمایی با توزیع مستقل و یکسان و آهنگ λ

نشان‌دهنده زمان اولین پیشامد فرایندی پواسنی $\{X(t), t \geq 0\}$

$$P(T_2 > t | T_1 = s) = P(\text{در } (s,t) \text{ پیشامد } 0 | T_1 = s)$$

استقلال افزایشی

$$= P(\text{در } (s,t) \text{ پیشامد } 0)$$

$$P(X_s(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

قضیه

$T_۱$ و $T_۲$ و ... (دنباله زمان‌های بین-پیشامدها) متغیرهای تصادفی نمایی با توزیع مستقل و یکسان و آهنگ λ

S_x زمان x-اُمین پیشامد فرایند پواسنی

$$S_x = \sum_{i=۱}^{x} T_i$$

آن‌گاه S_n متغیر تصادفی گاما با مقادیر x و λ است. تابع چگالی برابر است با

$$f(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{x-۱}}{(x-۱)!}, t > 0$$

اثبات-[؟] استفاده از استقراء

فرایند پواسن

قضیه $\{X(t), t \geq 0\}$ فرایند پواسن با آهنگ λ و X(t) متغیر تصادفی پواسن با آهنگ λt

$$P(X(t) = x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$$

فرایند پواسن - اثبات

$$P(X(t)=x)=\int_0^t P(X(t)=x|S_x=s)\lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{x-1}}{(x-1)!}ds$$

- هنگام $s>t$

$$P(X(t)=x|S_x=s)=0$$

- هنگام $0<s<t$

$$P(X(t)=x|S_x=s)=P(T_{x+۱}>t-s|T_۱+T_۲+\cdots+T_x=s)$$
$$=P(T_{x+۱}>t-s)=e^{-\lambda(t-s)}$$

$$P(X(t)=x)=\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{x-1}}{(x-1)!}ds=e^{-\lambda t}\lambda^x\int_0^t\frac{s^{x-1}}{(x-1)!}ds$$
$$=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$$

کاربردها

- مدل‌سازی زمان انتظار
- مدل‌سازی اطمینان‌پذیری (شکست)
- مدل‌سازی زمان خدمت
- چه زمان‌هایی توزیع نمایی کاربرد ندارد
  - تغییر آهنگ شکست در طول زمان
- مدل‌سازی

توزیع پواسن

میانگین

$$E[X] = \lambda$$

وردائی

$$Var[X] = \lambda$$

قضیه

X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع‌های پواسن و به ترتیب دارای ضرائب λ و μ هستند.

- آن‌گاه جمع $X + Y$ توزیع پواسنی با ضریب $\lambda + \mu$ است.

به دیگر سخن

- توزیع پواسن افزایشی **additive** است

قضیه-اثبات

استفاده از قانون احتمال کل

$$P\{X+Y=n\}=\sum_{x=0}^{n}P\{X=x,Y=n-x\}$$

X و Y مستقل از یکدیگر

$$=\sum_{x=0}^{n}P\{X=x\}P\{Y=n-x\}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\left\{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\right\}\left\{\frac{e^{-\mu}\mu^{n-x}}{(n-x)!}\right\}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{x=0}^{n}\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\lambda^{x}\mu^{n-x}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^{n}}{n!}$$

مثال

$$N = ۱ + ۱ + \cdots + ۱$$

N متغیر تصادفی پواسن با ضریب $\lambda > 0$ که به صورت N جمع ۱ نوشته شده است

با فرض استقلال و تغییر جداگانه هر ۱ با احتمال p باقی بماند و با احتمال 1-p پاک شود. توزیع نتیجهٔ M به شکل $M = ۱ + 0 + 0 + ۱ + \cdots + ۱$ چیست؟

قضیه

N متغیر تصادفی پواسن با ضریب $\lambda > 0$ و M توزیع دوجمله‌ای با ضرائب N و p است. آنگاه توزیع غیر شرطی M پواسنی با ضریب λp است.

قضیه- اثبات

$$P\{M = x\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{M = x|N = n\}P\{N = n\}$$

$$= \sum_{n=x}^{\infty} \left\{\frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (۱-p)^{n-x}\right\}\left\{\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right\}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^x}{x!} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{[\lambda(۱-p)]^{n-x}}{(n-x)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^x}{x!} e^{\lambda(۱-p)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^x}{x!}, x = 0, ۱, \ldots$$

مثال فرایند پواسن مکانی

خرابی کابل زیردریا فرایندی پواسن با $\lambda = ۰.۱$ در هر کیلومتر است.

- الف- احتمال عدم خرابی در دو کیلومتر اولیه
- ب- عدم خرابی در دو کیلومتر اولیه،مطلوب است احتمال عدم خرابی در کیلومتر دو تا سه

- الف- $X(۲)$ توریع پواسن با ضریب $۰.۲ = ۲ \times ۰.۱$. پس $\mathrm{P}\{X(۲) = 0\} = e^{-۰.۲} = ۰.۸۱۸۷$
- ب- استفاده از استقلال $X(۳) - X(۲)$ و $X(۲) = X(۲) - X(0)$ احتمال شرطی برابر احتمال غیرشرطی $P\{X(۳) - X(۲) = 0\} = P\{X(۱) = 0\} = e^{-۰.۱} = ۰.۹۰۴۸$

فرایند پواسن مکانی

جانشینی فضا به جای زمان

- خرابی در طول کابل
- سه بعدی- ستاره در فضا

مثال-

مراجعهٔ مشتری به فروشگاه فرایندی پواسن با $\lambda = 4$ در هر ساعت است. شروع کار مغازه راس ۹ صبح.

- احتمال مراجعهٔ دقیقا یک مشتری تا ۹:۳۰ و پنج نفر تا ۱۱:۳۰ صبح

- الف- $P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right) = 1, X\left(\frac{5}{2}\right) = 5\right\}$
- استفاده از استقلال $X\left(\frac{5}{2}\right) - X\left(\frac{1}{2}\right)$ و $X\left(\frac{1}{2}\right)$ جهت تدوین مسئله

$$P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right) = 1, X\left(\frac{5}{2}\right) = 5\right\} = P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right) = 1, X\left(\frac{5}{2}\right) - X\left(\frac{1}{2}\right) = 4\right\}$$

$$= \left\{\frac{e^{-4\left(\frac{1}{2}\right)} 4\left(\frac{1}{2}\right)}{1!}\right\}\left\{\frac{e^{-4(2)} 4(2)}{4!}\right\}$$

$$= \left(2e^{-2}\right)\left(\frac{512}{3} e^{-8}\right) = 0.0154965$$

فرایندهای غیرایستا یا ناهمگن

λ ثابت

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}(\mathrm{s}+h)-\mathrm{X}(\mathrm{s})=۱)=\frac{(\lambda h)^{۱}e^{-\lambda h}}{۱!}$$
$$=(\lambda h)\left(۱-\lambda h-\frac{۱}{۲}\lambda^{۲}h^{۲}-\cdots\right)$$
$$=\lambda h+o(h)$$

بسیاری کاربردها نیاز به آهنگ متغیر با زمان $\lambda=\lambda(t)$

- $\mathrm{X(t)}$ فرایند پواسن غیرایستا، یا ناهمگن
  - پس $\mathrm{X(t)}-\mathrm{X(s)}$
    - تعداد پیشامدها در بازهٔ [s,t] دارای توزیع پواسن با ضریب $\int_s^t \lambda(u)du$
  - بازه‌های مجزا متغیرهای تصادفی مستقل

قضیه

$\{X(t), t \geq 0\}$ فرایند پواسن غیرایستا با آهنگ $\lambda(t) > 0$ آن‌گاه

$$P\{X(t) = x\} = \frac{e^{-\int_0^y \lambda(t)dt}\left(\int_0^y \lambda(t)dt\right)^x}{x!}$$

مثال

- تقاضا برای کمک‌های اولیه مبتنی بر فرایند پواسن غیرایستا با تابع آهنگ

$$\lambda(t)=\begin{cases} ۲t, & 0\le t<۱ \\ ۲, & ۱\le t<۲ \\ ۴-t, & ۲\le t\le ۴ \end{cases}$$

- t مبتنی بر ساعت
- سوال- احتمال دو تقاضا در دو ساعت ابتدایی و دو تقاضا در دو ساعت دوم؟

- مجزا پس محاسبهٔ جداگانه
  - میانگین دو ساعت نخست

$$\lambda=\int_0^{۱} ۲t dt+\int_{۱}^{۲} ۲dt=۳$$

$$\mathrm{P(X(۲)=۲)}=\frac{e^{-۳}(۳)^{۲}}{۲!}=۰.۲۲۴۰$$

  - میانگین دو ساعت دوم

$$\lambda=\int_{۲}^{۴} ۴-t dt=۲$$

$$\mathrm{P(X(۴)-X(۲)=۲)}=\frac{e^{-۲}(۲)^{۲}}{۲!}=۰.۲۷۰۷$$

مثال-

N فرایندی پواسنی با تابع آهنگ $\lambda(t) = ۲t$

- مشاهدهٔ ۱۰۰ رخداد تا زمان ۱,۲
  - $N(۱.۲) = ۱۰۰$
    - رخداد فراوان زمان کم $N(۱.۲) - N(0) = ۱۰۰$ و میانگین کم $\Lambda = \int_0^{۱.۲} ۲t dt = ۱.۴۴$
  - سوال- $N(۲.۶)$
    - ایا رخداد دوباره باز هم زیاد
    - باید پواسنی بودن را در نظر داشت
      - افزایش‌های مستقل- دانستن از 0 تا ۱,۲ بدون تاثیر بر آنچه که از ۱,۲ تا ۲,۶ است

$$N(۲.۶) = [N(۲.۶) - N(۱.۲)] + [N(۱.۲) - N(0)]$$

- M با میانگین $\Lambda = \int_{۱.۲}^{۲.۶} ۲t dt = ۵.۳۲$

$$[N(۲.۶)|N(۱.۲) = ۱۰۰] \sim M + ۱۰۰$$

- میانگین

$$E[N(۲.۶)|N(۱.۲) = ۱۰۰] = E[M + ۱۰۰] = E[M] + ۱۰۰ = ۵.۳۲ + ۱۰۰ = ۱۰۵.۳۲$$

- وردائی

$$Var[N(۲.۶)|N(۱.۲) = ۱۰۰] = Var[M + ۱۰۰] = Var[M] = ۵.۳۲$$

- مثال $N(۲.۶) = ۱۰۴$

$$P[N(۲.۶) = ۱۰۴|N(۱.۲) = ۱۰۰] = P[M + ۱۰۰ = ۱۰۴] = P[M = ۴] = \frac{e^{-۵.۳۲}(۵.۳۲)^۴}{۴!} = ۰.۱۶۳۳۰$$

فرایند پواسن مرکب

عرضهٔ بیمه به کارمندان

- نگران تعداد و فراوانی یا عدد تصادفی تعداد ادعاها
- هم‌چنین نگران شدت اندازه تصادفی هر ادعا
- یا جمع تمامی ادعاها
  - جمع اعداد تصادفی متغیرهای تصادفی
  - پیچیدگی تحلیل
- توزیع احتمال با نام توزیع مرکب
- در صورت تبعیت فراوانی از فرایند پواسن و شدت مستقل و همگی دارای توزیع احتمال یکسان
  - فرایند پواسن مرکب

فرایند پواسن مرکب

فرایند تصادفی $\{X(t), t \geq 0\}$ به صورت

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, t \geq 0$$

$\{N(t), t \geq 0\}$ فرایندی پواسن با آهنگ λ

$\{Y_i, i \geq 1\}$ خانواده‌ای از متغیرهای مستقل توزیع یکسان که از $\{N(t), t \geq 0\}$ نیز مستقلند.

فرایند پواسن مرکب- نمونه‌ها

۱ $\equiv Y_i$، آن‌گاه $X(t)=N(t)$

تعداد ادعاهای ارجاعی به نمایندگی بیمه دارای آهنگ پواسن ۲۰ $=\lambda$ در روز و میزان خسارت Y هر ادعا متغیر تصادفی نمائی با میانگین ۵۰۰ $=\theta$، آن‌گاه تجمیع X از ادعاها فرایند پواسن مرکب

تعداد ادعاهای تصادف ارجاعی به نمایندگی بیمه خودرو دارای آهنگ پواسن ۵ $=\lambda$ در ساعت و تعداد مستقل افراد سخت زخمی در هر تصادف تابعی از متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای ۸ و ۲.۰، آن‌گاه تجمیع X از افراد شدیدا زخمی فرایند پواسن مرکب

رفتن اتوبوس‌ها به پشامد ورزشی طبق فرایندی تصادفی،تعداد تماشاچی‌ها در هر اتوبوس مستقل و توزیع یکسان

- $\{X(t),t\geq 0\}$ فرایند پواسن مرکب که $X(t)$ نمایشگر تعداد طرفداران که تا زمان t رسیدند.
- Y_i نمایشگر تعداد طرفدارها در اتوبوس i-اُم

هزینه هر مشتری در فروشگاه مطابق فرایند پواسن

- Y_i میزان خرج کردن مشتری i-اُم در فروشگاه مستقل و توزیع یکسان.
- $\{X(t),t\geq 0\}$ فرایند پواسن مرکب که $X(t)$ نمایشگر مقدار کل هزینهٔ مشتریان در فروشگاه تا زمان t

فرایند پواسن مرکب

پیچیدگی و سختی تحلیل فرایندهای پواسن مرکب

- بنابراین بیشتر سعی بر تقریب

جمع تعداد زیادی متغیر مستقل و یکسان تقریبا برابر متغیر تصادفی نرمال با همان مقدار میانگی و وردائی جمع

- مطابق قانون اعداد بزرگ

- پس نیاز به محاسبهٔ میانگین و وردائی

$$Var[X] = E\big[Var[X|Y]\big] + Var[E[X|Y]]$$

$$E[X] = E\big[E[X|Y]\big]$$

- $E[X(t)] = \lambda t E[Y_1]$
- $Var[X(t)] = \lambda t Var[Y_1^2]$

فرایند پواسن مرکب- مثال

تعداد ادعاهای ارجاعی به نمایندگی بیمه دارای آهنگ پواسن $\lambda = ۲۰$ در روز و میزان خسارت Y هر ادعا متغیر تصادفی نمائی با میانگین $\theta = ۵۰۰$، آن‌گاه تجمیع X از ادعاها فرایند پواسن مرکب

- سوال- $X(۱۰)$ در ده روز نخست؟

$$E[X(۱۰)] = ۲۰ \times ۱۰ \times ۵۰۰ = ۱۰۰۰۰۰$$
$$Var[X(۱۰)] = ۲۰ \times ۱۰ \times ۵۰۰^{۲} = ۱۰۰۰۰۰۰۰۰$$

- سوال- $\mathrm{P}\{X(۱۰) > ۱۲۰۰۰۰\}$؟

$$\mathrm{P}\{X(۱۰) > ۱۲۰۰۰۰\} \approx P\{N\left(۱۰۰۰۰۰, ۱۰۰۰۰^{۲}\right) > ۱۲۰۰۰۰\}$$
$$\approx P\left\{\frac{X(۱۰) - ۱۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰} > \frac{۱۲۰۰۰۰ - ۱۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰}\right\}$$
$$\approx P\{N(0, ۱) > ۲\} \approx ۱ - \phi(۲) = ۱ - ۰.۹۷۷۲ = ۰.۰۲۲۸$$

فرایند پواسن مرکب- مثال

مهاجرت خانواده‌ها به ناحیه‌ای با آهنگ پواسن ۲ در هفته

تعداد افراد هر خانواده مستقل و دارای مقادیر ۱ و ۲ و ۳ و ۴ با احتمال به ترتیب ۱/۶ و ۱/۳ و ۱/۳ و ۱/۶

- سوال- امید و وردائی تعداد افراد مهاجر به ناحیه در بازهٔ پنج هفته‌ای؟
- Y_i نمایشگر تعداد افراد در خانوادهٔ **i**-اُم

$$E[Y_i] = ۱ \times \frac{۱}{۶} + ۲ \times \frac{۱}{۳} + ۳ \times \frac{۱}{۳} + ۴ \times \frac{۱}{۶} = \frac{۵}{۲}$$

$$E\left[Y_i^{۲}\right] = ۱^{۲} \times \frac{۱}{۶} + ۲^{۲} \times \frac{۱}{۳} + ۳^{۲} \times \frac{۱}{۳} + ۴^{۲} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۴۳}{۶}$$

- $X(۵)$ نمایشگر تعداد مهاجران در طول پنج هفته

$$E[X(۵)] = ۲ \times ۵ \times \frac{۵}{۲} = ۲۵$$

$$Var[X(۵)] = ۲ \times ۵ \times \frac{۴۳}{۶} = \frac{۲۱۵}{۳}$$

فرایند پواسن مرکب- مثال

- سوال- احتمال تقریبی مهاجرت حداقل ۲۴۰ نفر به ناحیه در ۵۰ هفته بعدی
- Y_i نمایشگر تعداد افراد در خانوادهٔ i-اُم
- $E[Y_i] = \frac{۵}{۲}$ و $E\left[Y_i^{۲}\right] = \frac{۴۳}{۶}$ و

$$E[X(۵۰)] = ۲ \times ۵۰ \times \frac{۵}{۲} = ۲۵۰$$

$$Var[X(۵۰)] = ۲ \times ۵۰ \times \frac{۴۳}{۶} = \frac{۴۳۰۰}{۶}$$

$$P\{X(۵۰) \geq ۲۴۰\} = ۱ - \phi(-۰.۳۹۲۲) = \phi(۰.۳۹۲۲) = ۰.۶۵۲۵$$

سخن کوتاه

متغیر تصادفی پواسن X با میانگین Λ

- مقادیر آن صرفا عدد صحیح نامنفی
- $P\{X = x\} = \frac{e^{-\Lambda}\Lambda^x}{x!}$
- $E[X] = Var[X] = \Lambda$

متغیر تصادفی پواسن X با تابع آهنگ λ

- X فرایندی شمارشی است X(0)=0 و $t > 0$ آن‌گاه X(t) غیرکاهشی است و صرفا مقادیر عدد صحیح نامنفی است.
- X دارای افزایش‌های مستقل است، هر مجموعه افزایش‌های $X(t_j + h_j) - X(t_j)$ برای $j = ۱,۲, \dots, n$ مستقل است
- برای همهٔ $t \geq 0$ و $h > 0$، افزایش $X(t+h) - N(h)$ متغیر تصادفی پواسن با میانگین $\Lambda = \int_t^{t+h} \lambda(z)dz$ است.
- $\int_0^t \lambda(z)dz$ تابع مقدار میانگین خوانده می‌شود و $E[X] = \int_0^t \lambda(z)dz$
- اگر تابع آهنگ λ ثابت باشد، آن‌گاه X «فرایند پواسن همگن» خوانده می‌شود

سخن کوتاه- تعاریف متفاوت فرایندهای پواسنی

۱- احتمال پیشامد متناسب با عرض بازه‌ها (استقلال بازه‌ها)

- مدل فیزیکی

۲- احتمال توزیع پیشامدها بین $[0,t)$ پواسنی است X(t) یا N(t)

- پیشامد-محور- تعداد پیشامدها در بازه‌های زمانی داده شده
- امکان به تحلیل و شبیه‌سازی
- استفاده هنگام نیاز به اطلاعات تعداد پشامدها در زمان داده شده

۳-توزیع احتمال زمان‌های بین دریافت‌ها نمائی است T(n)

- زمان-محور- زمان‌های رخداد پیشامدها
- امکان تحلیل و شبیه‌سازی
- استفاده هنگام نیاز به اطلاعات زمان‌های پیشامد

تحریر محل نزاع فرایند پواسنی

$$\{\mathbf{N(t)} \geq \boldsymbol{n}\} = \{\boldsymbol{T(n)} \leq \boldsymbol{t}\}$$

سخن کوتاه- تعاریف متفاوت فرایندهای پواسنی

مثال- شمارش تعداد بازدیدهای تارمانه از ۶ تا ۶:۱۰ عصر

۱- احتمال پیشامد متناسب با عرض بازه‌ها (استقلال بازه‌ها)

- مدل فیزیکی
  - فرایند پواسنی؟ احتمال بازدید متناسب با طول بازهٔ زمانی
  - بازدیدهای مستقل در بازه‌های زمانی مجزا
  - مدل چون فرایند پواسن با آهنگ تعداد بازدید بر ثانیه

۲- احتمال توزیع پیشامدها بین $(0,t]$ پواسنی است

- بازدید در $(s,s+t]$ پواسن با پارامتر λt
- احتمال دقیقا پنج بازدید در یک ثانیه $P(N(1)=۵] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{۵}}{۵!}$
- تعداد موردانتظار بازدید د ده دقیقه $E(N(۶۰۰)] = ۶۰۰\lambda$
- Nبازدید در ۱۰ دقیقه $\hat{\lambda} = \frac{N}{۶۰۰}$

۳-توزیع احتمال زمان‌های بین دریافت‌ها نمائی است

- زمان‌های بین بازدید مستقل یکسان $T_i \sim e^{\lambda}$
- زمان مورد انتظار بین بازدیدها $\mathrm{E}[T_i] = \frac{۱}{\lambda}$
- زمان مورد انتظار بازدید n: $\sum_{i=۱}^{n} \mathrm{E}[T_i] = \frac{n}{\lambda}$

فرایند پواسن و فرایند شمارشی

فرایند پواسن

- فرایندی تصادفی که متغیر تصادفی $X(t)$ دارای مقادیر نمونه‌برداری ناپیوسته، افزایش ایستای مستقل، و دارای توزیع پواسن

فرایند شمارشی

- فرایندی تصادفی که متغیر تصادفی $X(t)$ دارای مقادیر نمونه‌برداری ناپیوسته، افزایش ایستای مستقل، و دارای توزیع دلخواه

منابع

“Basic Concepts of the Poisson Process,” https://www.probabilitycourse.com/chapter11/11_1_2_basic_concepts_of_the_poisson_process.php, دستیابی ۱۴ اردیبهشت ۱۴۰۰

A. Kim, “Poisson Distribution — Intuition, Examples, and Derivation,” https://towardsdatascience.com/poisson-distribution-intuition-and-derivation-1059aeab90d, دستیابی ۱۴ اردیبهشت ۱۴۰۰

A. Kim, “Exponential Distribution — Intuition, Derivation, and Applications,” https://towardsdatascience.com/what-is-exponential-distribution-7bdd08590e2a, دستیابی ۱۴ اردیبهشت ۱۴۰۰

James W. Daniel, “Poisson processes (and mixture distributions),” 2019

[راس]

[پینسکی]

[متئوس]

[ریبیرو]